SOLUTION

D'UNE QUESTION TRES DIFFICILE DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR MR. EULER.

1.

C'eſt le plan d'une lotterie qui m'a fourni cette queſtion, que je me propoſe de développer. Cette lotterie étoit de cinq claſſes, chacune de 10000 billets, parmi lesquels il y avoit 1000 prix dans chaque claſſe, & par conſéquent 9000 blancs. Chaque billet devoit paſſer par toutes les cinq claſſes; & cette lotterie avoit cela de particulier qu'outre les prix de chaque claſſe on s'engageoit de payer un ducat à chacun de ceux dont les billets auroient paſſé par toutes les cinq claſſes ſans rien gagner. On voit bien que cette derniere dépenſe, à laquelle la Lotterie s'engage, eſt très incertaine, vu qu'il ſeroit poſſible d'un côté, que tous les prix dans chaque claſſe tombaſſent ſur les mêmes numéros, & dans ce cas il y en auroit 9000 à chacun desquels il faudroit un ducat. Or, de l'autre côté, ſi tous les prix des cinq claſſes tomboient ſur des numéros différens, il y auroit en tout 5000 billets gagnans, & autant de perdans, de ſorte que dans ce cas ladite dépenſe ne monteroit qu'à 5000 ducats. L'un & l'autre de ces deux cas étant presque moralement impoſſible, la queſtion eſt de déterminer le nombre des ducats que la lotterie ſera probablement obligée de payer. Pour cet effet il faut faire un dénombrement parfait de tous les cas poſſibles, pour chaque nombre de ceux qui perdront dans toutes les cinq claſſes, depuis le plus petit de 5000 jusqu'au plus grand de 9000.

2. Pour rendre cette recherche & plus générale & plus lumineuſe, je poſerai

1°. Le nombre des claſſes de la lotterie $= k$.

2°. Le nombre des prix dans chaque claſſe $= n$.

3°. Le nombre des billets blancs de chacune $= m$.

4°. Donc le nombre de tous les billets $= m + n$.

Chacun de ces $m + n$ billets paſſe par toutes les k claſſes, dans chacune desquelles il gagnera ou perdra; & s'il arrive qu'il ne gagne rien dans toutes les claſſes, alors il jouira du bénéfice mentionné d'un ducat. Il s'agit donc d'eſtimer ſelon les regles de la probabilité le nombre des billets qui paſſeront par toutes les claſſes ſans rien gagner; & d'abord, pour connoître les limites de ce nombre, ſuppoſons que tous les prix de chaque claſſe tombent ſur les mêmes billets: dans ce cas donc il n'y aura que n billets qui gagnent, & tous les autres, dont le nombre eſt $= m$, ſeront dans le cas de recevoir un ducat, de ſorte que cette dépenſe eſt de m ducats pour le fond de la lotterie, & c'eſt la plus grande poſſible. Or elle ſera la plus petite lorsqu'il arrivera que tous les prix de chaque claſſe tombent ſur des billets différens: dans ce cas le nombre de ceux qui gagnent en quelque claſſe que ce ſoit, ſera $= kn$, & partant le nombre de ceux qui perdent $= m + n - kn = m - (k - 1)n$. Par conſéquent la dépenſe dans ce cas ne ſera que de $m - (k - 1)n$ ducats, en ſuppoſant que le nombre m eſt plus grand que $(k - 1)n$: car s'il lui étoit égal, ou même plus petit, cette dépenſe ſe réduiroit à rien.

3. Voilà donc la queſtion dont il faut chercher la ſolution. Il s'agit de trouver, parmi tous les cas poſſibles, ceux où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les k claſſes ſera, ou m, ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$, ou $m - 4$ &c. juſqu'à $m - (k - 1)n$. Enſuite on ſait par les regles de la probabilité, que chacun de ces nombres diviſé par le nombre de tous les cas poſſibles exprime

exprime la probabilité que ce cas exiſte, laquelle ſera d'autant plus grande qu'elle approche plus de l'unité; & ſi elle devenoit égale à l'unité, ce ſeroit une marque d'une entiere certitude. Cela arrive dans le cas d'une ſeule claſſe, où $k = 1$, attendu que le nombre des perdans eſt alors certainement $= m$, & l'expreſſion pour la probabilité devient alors $= 1$, ou bien elle marque une certitude entiere. Mais, ſi la lotterie eſt compoſée de pluſieurs claſſes, de ſorte que $k > 1$, on aura toujours pluſieurs cas à développer, ſelon que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les claſſes eſt, ou m, ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$ &c. juſqu'à $m - (k - 1)n$: & ayant trouvé la probabilité de chacun de ces cas, puiſqu'il faut de toute néceſſité que quelcun d'eux exiſte, il eſt évident que la ſomme de toutes ces probabilités enſemble eſt égale à l'unité ou à la meſure d'une certitude entiere. Cette propriété ſert d'ailleurs à vérifier les ſolutions qu'on donne des queſtions pareilles; mais ici elle me ſervira à trouver la ſolution même du probleme propoſé, & je doute fort que ſans ce ſecours on y puiſſe réuſſir.

4. Je ſuppoſe d'abord qu'on ait déjà tiré la premiere claſſe, & que les prix ſoient tombés ſur les billets marqués A, B, C, D, E &c. dont le nombre eſt $= n$. Maintenant, en paſſant à la ſeconde claſſe, où il y a encore n prix, le nombre de tous les billets étant $= m + n$, je remarque que le nombre de toutes les variations poſſibles parmi les n billets auxquels les prix ſont attachés, ſans avoir égard à leur ordre, eſt

$$= \frac{(m+n)}{1.}\frac{(m+n-1)}{2.}\frac{(m+n-2)}{3.}\cdots\cdots\frac{(m+1)}{n};$$

& ſi l'on veut auſſi avoir égard à la diverſité de l'ordre ſuivant lequel ils ſortent ſucceſſivement, on n'a qu'à omettre le dénominateur, & le nombre de tous les cas poſſibles ſera $= (m+n)(m+n-1)(m+n-2) \ldots\ldots (m+1)$. Or, conſidérant auſſi la diverſité de l'ordre, le nombre de tous les cas où les prix ſe rencontrent avec les mêmes billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere claſſe & dont le nombre eſt $= n$, eſt exprimé ainſi

1. 2. 3. 4 . . . . . . n. Donc, pour que les prix de la ſeconde claſſe tombent ſur les mêmes billets que dans la premiere, la probabilité eſt =

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n}{(m+1)\ (m+2)\ (m+3)\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+n)},$$

& que la même choſe arrive auſſi dans la troiſieme, la probabilité eſt égale au quarré de cette expreſſion, dans la quatrieme au cube, & ainſi de ſuite. Par conſéquent, que dans toutes les k claſſes les prix tombent ſur les mêmes billets, la probabilité ſera =

$$\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n}{(m+1)\ (m+2)\ (m+3)\ .\ .\ .\ .\ (m+n)}\right)^{k-1}.$$

5. Je remarque ſur cette expreſſion, 1°. que le nombre de toutes les variations poſſibles par rapport aux billets qui ſe rencontrent avec les prix, dans toutes les claſſes enſemble, eſt = $((m+1)\ (m+2)\ (m+3)\ .\ .\ .\ .\ (m+n))^{k-1}$, en tenant auſſi compte de la diverſité dans l'ordre où les billets qui gagnent, ſortent ſucceſſivement; enſuite 2°. que le nombre de tous les cas poſſibles que préciſément les billets marqués A, B, C, D &c. ſe rencontrent avec les prix dans toutes les claſſes, eſt

$$(1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n)^{k-1},$$

de ſorte que ce nombre diviſé par celui-là exprime la probabilité que ce cas exiſte, comme je viens de le trouver. Mais la remarque la plus eſſentielle, qui me conduira au but propoſé, conſiſte en ce que le nombre de tous les cas poſſibles, où dans toutes les k claſſes les prix ſe rencontrent avec les mêmes billets marqués A, B, C &c. dépend uniquement 1° du nombre des prix n, ou bien de celui des billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere claſſe, & 2°. du nombre des claſſes k de la lotterie; de ſorte que le nombre des autres billets, qui eſt = m, n'entre point du tout en conſidération; ou bien, quelque grand que ſoit le nombre de tous les billets, le nombre des

des cas qui font gagner les mêmes billets dans toutes les classes demeure toujours le même. Qu'on n'oublie point que je parle ici toujours de toutes les variations possibles, tant dans les billets même que dans leur ordre.

6. Posons pour abréger

$$((m+1)(m+2)(m+3)\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(m+n))^{k-1} = M,$$

$$\&\;(1.\;\;2.\;\;3.\;\;4\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;n)^{k-1} = \alpha,$$

& le nombre des cas où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit $= m$, sera $= \alpha$, & la probabilité que quelqu'un de ces cas existe sera $= \frac{\alpha}{M}$. Maintenant je passe au second cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 1$; & je remarque qu'outre les billets marqués A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere classe, il faut que l'un des autres, dont le nombre est $= m$, gagne aussi dans une ou plusieurs des autres classes; puisque ce bonheur peut arriver à chacun des m billets, le nombre de tous ces cas sera exprimé par βm, où β ne renferme plus le nombre m, mais dépend uniquement des combinaisons avec les autres billets qui gagnent dans les classes suivantes. De la même maniere pour le troisieme cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 2$, il faut combiner deux billets de ceux qui ont perdu dans la premiere, qui recevant $m(m-1)$ variations, le nombre de tous ces cas aura cette forme $\gamma m(m-1)$. Pour le quatrieme cas, où le nombre des perdans par toutes les classes est $= m - 3$, le nombre de tous les cas possibles sera $= \delta m(m-1)(m-2)$; & ainsi de suite pour les cas suivans où le nombre de perdans dans toutes les classes est ou $m - 4$, ou $m - 5$, ou $m - 6$ &c. jusqu'à $m - (k-1)n$.

7. Pour voir d'un coup d'oeil toutes ces suppositions, je les représenterai de cette façon:

Nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes.	Nombre de tous les cas où cela arrive.	Probabilité que quelcun de ces cas existe.
m	α	$\frac{\alpha}{M}$
$m-1$	βm	$\frac{\beta m}{M}$
$m-2$	$\gamma m(m-1)$	$\frac{\gamma m(m-1)}{M}$
$m-3$	$\delta m(m-1)(m-2)$	$\frac{\delta m(m-1)(m-2)}{M}$
$m-4$	$\varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3)$	$\frac{\varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3)}{M}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$m-(k-1)n$	$\omega m(m-1)\ldots(m-kn+n+1)$	$\frac{\omega m(m-1)\ldots(m-kn+n+1)}{M}$

où pour abréger j'ai posé

$$M = ((m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n))^{k-1}.$$

Ayant déjà trouvé la premiere valeur

$$\alpha = (1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ n)^{k-1},$$

tout revient à chercher les valeurs des lettres suivantes β, γ, δ, ε &c. ce qui se pourroit faire suivant les principes de la combinaison & variation; mais cela demanderoit des recherches fort épineuses & ennuyantes, qu'on auroit même bien de la peine à pousser si loin qu'on en

en pût découvrir la loi de la progreſſion : encore une telle loi conclue uniquement par induction ſeroit fort ſujette à caution.

8. Mais la conſidération que toutes ces probabilités enſemble doivent être égales à l'unité, nous ſournit une route fort aiſée pour déterminer toutes ces quantités α, β, γ, δ &c. Nous n'avons qu'à ſatisfaire à cette équation :

$$M = \alpha + \beta m + \gamma m(m-1) + \delta m(m-1)(m-2) + \varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3) \text{ \&c.}$$

en obſervant que les quantités α, β, δ, ε &c. ne dépendent point du nombre m, mais qu'elles ſont uniquement déterminées par les deux autres n & k. Voici de quelle maniere on doit conduire le raiſonnement pour arriver à ce but. Puiſque cette équation doit toujours avoir lieu, quelque valeur qu'on donne au nombre m, poſons d'abord $m = 0$, & nous aurons

$$(1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ n)^{k-1} = \alpha,$$

d'où nous tirons la même valeur pour α, que je lui ai aſſignée auparavant. Poſons enſuite pour m ſucceſſivement les nombres 1, 2, 3, 4 &c. pour avoir ces équations

$$(2.3.4\ \ldots\ (n+1))^{k-1} = \alpha + \beta,$$
$$(3.4.5\ \ldots\ (n+2))^{k-1} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$
$$(4.5.6\ \ldots\ (n+3))^{k-1} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta$$
$$(5.6.7\ \ldots\ (n+4))^{k-1} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,$$
$$(6.7.8\ \ldots\ (n+5))^{k-1} = \alpha + 5\beta + 20\gamma + 60\delta + 120\varepsilon + 120\zeta,$$

&c.

d'où l'on tirera ſans difficulté ſucceſſivement les valeurs de toutes les lettres β, γ, δ, ε, ζ &c. juſqu'à la derniere ω, qu'on trouvera aiſément être $= 1$, puiſque le nombre des cas où tous les prix tombent ſur des billets différens eſt

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ \ldots\ldots\ (m-(k-1)n+1).$$

9.

9. Soit, pour abréger, la valeur de M, en y poſant en général $m = \lambda$ indiquée de cette ſorte, $M^{(\lambda)}$, & nous aurons

$$M^{(0)} = \alpha,$$
$$M^{(1)} = \alpha + \beta,$$
$$M^{(2)} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

d'où prenant les différences:

$$M^{(1)} - M^{(0)} = \beta,$$
$$M^{(2)} - M^{(1)} = \beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - M^{(2)} = \beta + 4\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - M^{(3)} = \beta + 6\gamma + 18\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

& les ſecondes différences ſeront:

$$M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)} = 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - 2M^{(2)} + M^{(1)} = 2\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 2M^{(3)} + M^{(2)} = 2\gamma + 12\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

de plus les troiſiemes différences:

$$M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)} = 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 3M^{(3)} + 3M^{(2)} - M^{(1)} = 6\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

& les quatriemes:

$$M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} + 4M^{(1)} + M^{(0)} = 24\varepsilon,$$

&c.

Sur la continuation de ces différences il ne ſauroit y avoir aucun doute.

10. Toutes ces valeurs $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ &c. dérivées de $M = ((m+1)(m+2)(m+3) \;.\;.\;.\;.\; (m+n))^{k-1}$ étant connues & indépendantes du nombre m, les quantités α, β, γ, δ &c. qui renferment la ſolution de notre queſtion, ſeront déterminées ainſi:

$$\alpha = M^{(0)},$$

$$\beta = \frac{M^{(1)} - M^{(0)}}{1},$$

$$\gamma = \frac{M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)}}{1.\ 2},$$

$$\delta = \frac{M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)}}{1.\ 2.\ 3},$$

$$\varepsilon = \frac{M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} - 4M^{(1)} + M^{(0)}}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$

&c.

Or, parmi ces diverſes valeurs dérivées de M, nous connoiſſons les rapports ſuivans:

$$M^{(1)} = \left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} M^{(0)},$$

$$M^{(2)} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} M^{(1)}$$

$$M^{(3)} = \left(\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} M^{(2)},$$

$$M^{(4)} = \left(\frac{n+4}{4}\right)^{k-1} M^{(3)},$$

&c.

la premiere étant $M^{(0)} = (1 . 2 . 3 . 4 \ldots n)^{k-1}$. D'où, par cette ſeule valeur $M^{(0)}$, nous aurons

$$\beta = \frac{\alpha}{1}\left(\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{1 . 2}\left(\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

$$\delta = \frac{\alpha}{1 . 2 . 3}\left(\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2} . \frac{n+3}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2}\right)^{k-1} + 3\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{1 . 2 . 3 . 4}\left(\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2} . \frac{n+3}{3} . \frac{n+4}{4}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2} . \frac{n+3}{3}\right)^{k-1} + 6\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

dont la progreſſion eſt également évidente.

11. Pour mieux voir la nature de ces nombres α, β, γ, δ &c. développons quelques cas particuliers, & ſuppoſons d'abord qu'il n'y ait qu'un ſeul prix dans chaque claſſe, de ſorte que $n = 1$, le nombre des claſſes demeurant $= k$. Soit $k = \pi + 1$ pour avoir $k - 1 = \pi$. Le nombre de tous les billets dans chaque claſſe ſera donc $= m + 1$, & $M = (m + 1)^{\pi}$ & partant

$$M^{(0)} = 1; \quad M^{(1)} = 2^{\pi}; \quad M^{(2)} = 3^{\pi}; \quad M^{(3)} = 4^{\pi}; \quad M^{(4)} = 5^{\pi} \text{ \&c.}$$

d'où

d'où nous tirons les valeurs ſuivantes:

	ſi $\pi = 1$	ſi $\pi = 2$	ſi $\pi = 3$	ſi $\pi = 4$	ſi $\pi = 5$
$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
$\beta = \frac{2^\pi - 1}{1}$	$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 7$	$\beta = 15$	$\beta = 31$
$\gamma = \frac{3^\pi - 2.2^\pi + 1}{1.\ 2}$	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 6$	$\gamma = 25$	$\gamma = 90$
$\delta = \frac{4^\pi - 3.3^\pi + 3.2^\pi - 1}{1.\ 2.\ 3}$	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 65$
$\varepsilon = \frac{5^\pi - 4.4^\pi + 6.3^\pi - 4.2^\pi + 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 15$
&c.	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 1$

12. Soit maintenant le nombre des prix de chaque claſſe $n = 2$, les deux autres nombres m & $k = \pi + 1$ demeurant indéterminés. Donc, puiſque $M = (m + 1)^\pi (m + 2)^\pi$, nous aurons:

$$M^{(0)} = 2^\pi;\quad M^{(1)} = 6^\pi;\quad M^{(2)} = 12^\pi;\quad M^{(3)} = 20^\pi \text{ \&c.}$$

& partant:

	ſi $\pi = 1$	ſi $\pi = 2$	ſi $\pi = 3$
$\alpha = 2^\pi$,	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
$\beta = \frac{6^\pi - 2^\pi}{1}$,	$\beta = 4$	$\beta = 32$	$\beta = 208$
$\gamma = \frac{12^\pi - 2.6^\pi + 2^\pi}{1.\ 2}$,	$\gamma = 1$	$\gamma = 38$	$\gamma = 652$
$\delta = \frac{20^\pi - 3.12^\pi + 3.6^\pi - 2^\pi}{1.\ 2.\ 3}$,	$\delta = 0$	$\delta = 12$	$\delta = 576$
&c.	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 188$
	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 24$
	$\eta = 0$	$\eta = 0$	$\eta = 1$

13. Il seroit inutile de développer plusieurs cas, puisque la détermination des nombres α, β, γ, δ &c. demanderoit des calculs trop embarrassans qui même, au bout du compte, ne nous fourniroient aucun éclaircissement sur la question dont il s'agit. D'où l'on comprend que, si l'on vouloit appliquer ces formules à l'exemple de la loterie rapportée au commencement, en supposant

$$n = 1000, \quad m = 9000, \quad \& \ k = 5,$$

d'où résulteroit le nombre

$$M = (9001 \cdot 9002 \cdot 9003 \ \ldots \ 10000)^4,$$

& ceux qui en sont dérivés

$$M^{(0)} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ 1000)^4,$$
$$M^{(1)} = (2 \cdot 3 \cdot 4 \ \ldots \ 1001)^4,$$
$$M^{(2)} = (3 \cdot 4 \cdot 5 \ \ldots \ 1002)^4,$$
$$M^{(3)} = (4 \cdot 5 \cdot 6 \ \ldots \ 1003)^4,$$

on seroit obligé de s'enfoncer dans de terribles calculs avant que de parvenir à la connoissance des nombres α, β, γ, δ &c. dont la multitude monte à 4001. Ensuite il faudroit encore multiplier chacun de ces nombres par les coëfficiens assignés au §. 7. pour avoir les nombres de tous les cas où chaque variété peut arriver. Et enfin, ayant trouvé tous ces nombres, il resteroit à diviser chacun par le nombre M, pour avoir la probabilité que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit ou 9000, ou 8999, ou 8998, jusqu'à ce qu'on parvienne à 5000.

14. Il est bien certain que personne n'entreprendra jamais cet immense ouvrage, dans la seule vue de répondre aux Entrepreneurs de la lotterie mentionnée, à combien ils doivent probablement estimer la dépense à laquelle ils s'engagent en promettant un ducat à chacun de ceux qui n'auront rien gagné dans toutes les 5 classes. Donc, s'il n'y avoit point d'autre moyen de satisfaire à cette question, on seroit bien

bien obligé d'en regarder la ſolution comme moralement impoſſible, & il n'y auroit d'autre parti à prendre que de conſeiller aux Entrèpreneurs d'une pareille lotterie de s'en tenir à quelque nombre mitoyen entre la plus grande ſomme de 9000 ducats, & la plus petite de 5000 ducats, qui conſtituent les limites de cette dépenſe. Au reſte, s'il ne s'agiſſoit que de tirer une ſeule fois cette lotterie, il ne vaudroit pas même la peine de ſe livrer à ce travail, quand même il ne ſeroit pas ſi difficile, puisqu'un ſeul coup ne ſe regle jamais ſur la probabilité. Mais ſi l'on vouloit répéter pluſieurs fois de ſuite cette même lotterie, la queſtion deviendroit plus importante, puisqu'alors la dite dépenſe ſeroit, tantôt plus grande, tantôt plus petite: & ce n'eſt que dans ce cas qu'on pourroit être aſſuré que le milieu entre toutes ces dépenſes approchera d'autant plus de la ſomme déterminée par les regles de la probabilité, qu'on répétera plus de fois le tirage de cette même lotterie. C'eſt donc cette ſomme moyenne que les regles de la probabilité nous doivent découvrir.

15. Or, quelque inſurmontables que paroiſſent les calculs pour trouver cette ſomme, il ſe rencontre une certaine circonſtance heureuſe, qui rend extrêmement facile l'exécution de tous ces calculs, de ſorte qu'on n'a pas même beſoin de calculer les valeurs des nombres α, β, γ, δ &c. On n'a qu'à s'en tenir aux formules générales données dans le §. 7. & puisque pour chaque nombre de ducats, auquel la dépenſe peut monter, la probabilité eſt comme il ſuit:

que la dépense soit de tant de ducats	la probabilité est
m	$\frac{\alpha}{M}$
$m - 1$	$\frac{\beta m}{M}$
$m - 2$	$\frac{\gamma m (m - 1)}{M}$
$m - 3$	$\frac{\delta m (m - 1)(m - 2)}{M}$
.	.
.	.
.	.
$m - (k - 1) n$	$\frac{\omega m (m-1)(m-2) \ldots (m - (k-1)n + 1)}{M}$

la somme de chaque dépense multipliée par la probabilité donnera la vraie dépense moyenne que nous cherchons, qui sera par conséquent $=$

$$\frac{\alpha m + \beta m(m-1) + \gamma m(m-1)(m-2) \ldots + \omega m(m-1) \ldots (m-(k-1)n)}{M},$$

& je remarque que la valeur de cette expression peut être assignée sans qu'on ait besoin de développer, ni les nombres α, β, γ, δ &c. ni même le dénominateur M; ce qui est sans doute un évenement auquel on ne pouvoit pas s'attendre.

16. Ayant fait voir ci-dessus, que les nombres α, β, δ &c. ne dépendent pas du nombre m, & qu'ils doivent être tels qu'il soit

$$\alpha + \beta m + \gamma m (m - 1) + \delta m (m - 1)(m - 2) + \ldots$$
$$+ \omega m (m - 1)(m - 2) \ldots (m - (k - 1) n + 1)$$
$$= M = ((m + 1)(m + 2) \ldots (m + n))^{k-1},$$

il

il s'ensuit d'abord qu'écrivant $m - 1$ au lieu de m, il faut qu'il soit

$$\alpha + \beta(m-1) + \gamma(m-1)(m-2) + \ldots + \omega(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-1)n)$$
$$= (m(m+1)(m+2)\ldots\ldots + (m+n-1))^{k-1},$$

les nombres α, β, γ, δ &c. étant les mêmes qu'auparavant. Mais cette derniere expression $\alpha + \beta(m-1) + \gamma(m-1)(m-2) +$ &c. étant multipliée par m donne précisément le numérateur de la fraction, que nous venons d'assigner pour la quantité probable de la dépense: d'où nous concluons cette dépense $= \frac{m(m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1))^{k-1}}{((m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n))^{k-1}}$, qui se réduit évidemment à celle-ci $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$, dont l'application se fera aisément à chaque cas proposé, sans qu'on ait besoin de calculer ni les valeurs des lettres α, β, γ, δ &c. ni le nombre M. Voilà donc, contre toute attente, une solution aussi simple que belle de notre question, par laquelle nous connoissons qu'en général, le nombre des classes étant $= k$, le nombre des prix de chaque classe $= n$, & le nombre de tous les billets $= m + n$, la dépense en question doit être estimée $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$.

17. Pour le cas de la lotterie décrite au commencement, où $k = 5$, $n = 1000$ & $m = 9000$, la dépense en faveur de ceux qui ne gagnent rien dans toutes les cinq classes doit être estimée à $9000\left(\frac{9}{10}\right)^4$ ducats, ce qui fait $5904\frac{9}{10}$ ducats, d'où l'on voit que ce milieu est beaucoup plus proche de la plus petite limite 5000 que de la plus grande 9000.

Soit, pour donner un autre exemple, le nombre des classes encore $k = 5$, le nombre des prix de chaque classe $n = 8000$, & celui de tous les billets $m + n = 50000$; donc $m = 42000$: & quand on s'engage de payer aussi un ducat à chacun de ceux qui

 passent

paſſent par les cinq claſſes ſans rien gagner, cette dépenſe doit être eſtimée ſelon les regles de la probabilité à $42000\left(\frac{42}{50}\right)^4$, c'eſt à dire, à $20910\frac{6}{10}$ ducats.

18. En général, je remarque ſur l'eſtime de cette dépenſe que je viens de trouver $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$, que quand il n'y aura qu'une ſeule claſſe, elle ſera $= m$ auquel cas la probabilité devient une entiere certitude. Mais, ſi la lotterie eſt compoſée de 2 claſſes, cette dépenſe eſt $= \frac{mm}{m+n}$; pour trois claſſes elle devient $= \frac{m^3}{(m+n)^2}$, pour quatre $= \frac{m^4}{(m+n)^3}$, & ainſi de ſuite; de ſorte qu'elle décroît en raiſon de $m+n$ à m pour chaque claſſe de plus. Donc, ſi le nombre des claſſes étoit infini, cette dépenſe ſe réduiroit à rien, quelque petit que ſuit le nombre des prix par rapport à tous les billets. Comme cette ſimple formule vient d'être conclue d'un calcul extrêmement embarraſſé, il n'y a aucun doute qu'il n'y ait une autre méthode fort ſimple, qui y conduiſe directement ſans aucun détour. En effet, la ſeule conſidération de cette formule nous fournit d'abord les raiſonnemens qu'il faut faire pour y parvenir, que je vais mettre dans tout leur jour.

19. On n'a qu'à parcourir ſucceſſivement toutes les claſſes, en réfléchiſſant que chaque claſſe contient en tout $m+n$ billets, parmi leſquels il y a n gains & m pertes. Donc, la premiere claſſe étant tirée, il y aura certainement m billets qui auront perdu; ceux-ci entrant dans la ſeconde claſſe, il eſt probable qu'il y en aura quelques uns, qui gagnent, & cela dans le rapport du nombre de tous les billets $m+n$ au nombre des prix n: donc, de ces m billets qui ont perdu dans la premiere claſſe, il y aura probablement $m.\frac{n}{m+n}$ qui gagneront dans la

ſeconde

seconde classe, & partant le nombre de ceux qui passent par les deux premieres classes sans rien gagner, doit être estimé $= m. \frac{m}{m+n}$. Maintenant ces billets entrent dans la troisieme classe, & par la même raison leur nombre entier sera à celui des billets qui perdront aussi dans cette classe comme $m+n$ à m; par conséquent le nombre des billets qui passeront par les trois premieres classes sans rien gagner, sera probablement $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$. Par ce même raisonnement on trouve que le nombre des billets qui passeront probablement par quatre classes sans rien gagner, sera $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^3$; & en général, si le nombre des classes est $= k$, le nombre des billets qui passeront par toutes ces classes sans rien gagner doit être fixé selon les regles de la probabilité à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$; & si l'on s'engage de payer à chacun un ducat, cette dépense doit être estimée à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$ ducats, ce qui est précisément la somme que j'ai trouvée auparavant.

20. Si cette route est préférable à la premiere à cause de sa simplicité, la premiere a d'autres avantages très considérables en nous découvrant en détail la probabilité, que la dépense égale précisément une somme donnée. Car, comme il n'est pas même probable que la dépense actuelle soit la même que montre la probabilité, il est très important que le dénombrement de tous les cas possibles nous soit bien connu pour nous mettre en état de juger de la probabilité de chacun. Mais la derniere méthode a pourtant cet avantage sur la premiere, qu'elle peut être appliquée à des cas où toutes les classes de la lotterie ne contiennent pas le même nombre de prix; laquelle circonstance rendroit presque

impossible la premiere méthode. Cependant il faut toujours supposer que le nombre de tous les billets soit le même dans toutes les classes, puisque sans cette condition la question dont il s'agit ne sauroit avoir lieu. Soit donc l le nombre de tous les billets de chaque classe, & posons le nombre de ceux qui perdent dans la premiere classe $= m$, dans la seconde $= m'$, dans la troisieme $= m''$, dans la quatrieme $= m'''$ & ainsi de suite. Cela posé, le nombre des billets qui perdront dans toutes les classes sera probablement:

$$m \cdot \frac{m'}{l} \cdot \frac{m''}{l} \cdot \frac{m'''}{l} \cdot \frac{m^{IV}}{l} \cdot \frac{m^{V}}{l} \cdot \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait parcouru toutes les classes. D'où l'on voit que s'il y avoit une seule classe où tous les billets gagnassent, quelqu'un des nombres m, m', m'', m''' &c. évanouiroit, & le nombre trouvé se réduiroit à zéro; ce qui ne seroit plus la mesure de la probabilité, mais une certitude complette.

21. Pour en donner un exemple, supposons qu'il y ait une loterie composée de 5 classes, chacune renfermant 10000 billets: & dont la premiere contienne 1000 prix, la seconde 2000, la troisieme 3000, la quatrieme 4000, & la cinquieme 5000. Nous aurons donc $l = 10000$, & les nombres des billets qui perdent dans chaque classe seront:

$$m = 9000; \; m' = 8000; \; m'' = 7000; \; m''' = 6000; \; m^{IV} = 5000.$$

Et partant le nombre des billets qui passeront par toutes les 5 classes, sans rien gagner, sera conformément aux regles de la probabilité $= 9000 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = 1512$; ou bien on peut estimer qu'il n'y aura que 1512 billets qui perdront dans toutes les 5 classes; donc il est probable que de tous les 10000 billets il y en aura 8488 qui tireront quelque prix dans une ou plusieurs classes. Par conséquent, pour ceux qui s'intéresseroient dans cette lotterie, on peut dire que la probabilité est $\frac{8488}{10000}$ ou $\frac{1061}{1250}$, qu'ils ne passeront point par toutes les 5 classes sans rien gagner.